Conjectura lui Catalan

Scurt istoric

Vlad Copil Rodica Ioan

Universitatea *Spiru Haret*
Facultatea de Matematică şi Informatică

13 iunie 2014

Cuprins

Cuprins

Cuprins

În anul 1826, matematicianul german August Leopold Crelle (1780-1855) începe să tipărească la Berlin *Journal für die reine und angewandte Mathematik* care este cunoscut şi sub numele de *Jurnalul lui Crelle*.

În revistă s-au publicat lucrări ale unor mari matematicieni, printre care Euler, Abel, Cantor, şi a rămas până în zilele noastre unul dintre cele mai prestigioase jurnale de specialitate. În anul 2012, factorul său de impact 1.253 o clasează pe poziţia a 32-a dintre jurnalele de Matematică.

În 1844, Catalan îi scria lui Crelle [3] următoarele:

Je vous prie, Monsieur, de vouloir bien énoncer, dans votre recueil, le théorème suivant, que je crois vrai, bien que je n'aie pas encore réussi à le démontrer compl̀tement: d'autres seront peut-être plus heureux:
Deux nombres entiers consécutifs, autres que 8 et 9, ne peuvent être des puissances exactes; autrement dit: l'équation

$$x^m - y^n = 1,$$

dans laquelle les inconnues sont entières et positives n'admet qu'une seule solution.

Deşi Catalan afirmă că nu poate demonstra complet acest fapt, el nu va publica decât în 1885 [4] câteva rezultate empirice. Astfel, el menţionează fără demonstraţie câteva cazuri particulare ale conjecturii, cum ar fi

$$(x+1)^x - x^x = 1\,.$$

Gersonides $\sim$ 1320

Se pare că această problemă are o origine însă mai veche. În jurul anului 1320, matematicianul Levi ben Gershon (Gersonides) (1288-1344) se apleca asupra studiului numerelor armonice, i. e. de forma $2^m \cdot 3^n$ şi arăta [10] că singurele perechi de numere armonice a căror diferenţă este 1 sunt (1,2), (2,3), (3,4) şi respectiv (8,9).
Cu alte cuvinte, Gersonides rezolvă ecuaţiile

$$3^n - 2^m = 1 \tag{1}$$
$$2^m - 3^n = 1 \tag{2}$$

Euler -1738

În 1738 Leonhard Euler (1707-1783) a rezolvat ecuaţia

$$x^2 - y^3 = 1 \tag{3}$$

arătând [5] că singura soluţie este $x = 3$ şi $y = 2$.

Lebesgue - 1850

În 1850, Victor Lebesgue (1791-1875) arată [6] că ecuaţia

$$x^p - y^2 = 1 \tag{4}$$

nu are soluţii naturale când p este prim.

Cazuri particulare cu exponenţi mici

1. Nagel (1921): $x^3 - y^n \neq 1$
2. Selberg (1932): ecuaţia $x^4 - y^n = 1$ nu are soluţii dacă $n > 1$
3. Ko Chao (1965): ecuaţia $x^2 - y^n = 1$ nu are soluţii pentru $n \geq 5$

Un rezultat cu caracter mai general este dat de Le Veque în 1952; acesta a demonstrat [7] că pentru x şi y fixaţi ecuaţia

$$x^m - y^n = 1$$

are cel mult o soluţie, mai puţin în cazul în care $x = 3$ şi $y = 2$, când ecuaţia are două soluţii: (1,1) şi respectiv (2,3).

În 1960 J. Cassels consideră $d =$c.m.m.d.c. al cantităţilor $x - 1$ şi $\frac{x^p-1}{x-1}$; în funcţie de valoarea acestuia problema se împarte (ca şi marea teoremă a lui Fermat) în două cazuri: $d = 1$ sau $d = p$ prim.
Cassels [2] a arătat că primul caz conduce la o contradicţie, iar rezultatele determinate referitoare la cel de-al doilea caz au trezit din nou interesul pentru problemă.
Au urmat încercări ulterioare de rezolvare şi având în vedere noile tehnologii disponibile s-a încercat, însă fără succes, rezolvarea problemei cu ajutorul calculatorului.

În cele din urmă, demonstraţia conjecturii a fost făcută de către matematicianul român Preda Mihăilescu [9], folosind teoria corpurilor ciclotomice.

Rezultatul a fost obţinut în 2002 şi publicat tot în *Journal für die reine und angewandte Mathematik* în 2004.

Bibliografie I

- Y.F. Bilu, *Catalan's Conjecture (after Mihăilescu)*, Sém. Bourbaki, **55**ème année, n. 909, 26 p., (2002-2003).
- J.W.S. Cassels, *On the equation* $a^x - b^y = 1$, II, Proc. Cambridge Philos. Soc. **56**, p. 97-103, (1960).
- E. Catalan, *Note extraite d'une lettre adressée à l'éditeur*, J. Reine Angew. Math. **27**, p. 192, (1844).
- E. Catalan, *Quelques théorm̀es empiriques,* Mémoires de la Société Royale de Sciences de Liège, vol. 12, p. 42-43, (1885).
- L. Euler, *Commentationes Arithmeticae I*, Opera Omnia, Series I, vol. II, p. 56-58, B.G. Teubner, Basel, (1915).

Bibliografie II

- V. Lebesgue, *Sur l'impossibilité, en nombres entiers, de léquation $x^m = y^2 + 1$*, Nouvelles annales de mathématiques, 9, p. 178-181, (1850).
- W. Le Veque, *On the equation $a^x - b^y = 1$*, American Journal of Mathematics, 74, p. 325-331, (1952).
- T. Metsắnkylắ, *Catalan's Conjecture: Another Old Diophantine Problem Solved*, Bull. AMS, Vol. **41**, N. 1, p. 43-57, (2003).
- P. Mihăilescu, . *Primary Cyclotomic Units and a Proof of Catalan's Conjecture* J. Reine angew. Math. (572) p. 167–195 (2004).
- I. Peterson, *Medieval Harmony*, (1999)