Școala Pitagoreică - numărul guvernează lumea

Prof. Pîrvulescu Eugenia, autor
Prof. Dragomir Tanța, co-autor

Liceul Tehnologic ”Tiu Dumitrescu”,
orașul Mihăilești, județul Giurgiu

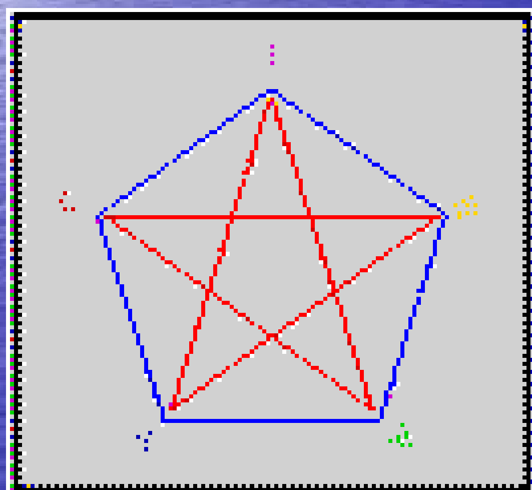
Scurtă biografie

- De la Pitagora nu s-a păstrat nimic scris. Pe baza unor tradiții se presupune că s-a născut în insula Samos cu circa 580 ani î.e.n.
- A învățat cu Tales din Milet, apoi fugind de tirania lui Polycrate s-a stabilit la Crotona în sudul Italiei, unde înființeaza o școala filozofico-religioasă: "Școala Pitagoreică".
- S-a căsătorit și a avut 3 urmași, doi băieți, Arimneste și Telauges și o fată, Damo. Telauges ajunsese mai târziu dascălul lui Empedocle.
- După versiunea lui Dicearc citat de Porfir, maestrul ar fi murit (circa 500 i.e.n.) în Metapont și locuitorii acestui oras i-au arătat lui Cicero casa, jilțul și mormântul acestuia.

Croton on the southern coast of Italy.

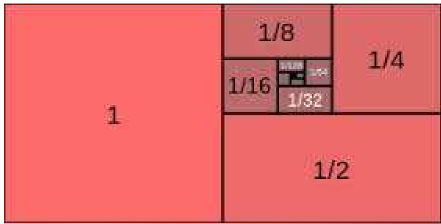
Pitagoreicii aveau ca semn de unire, Pentagonul stelat sau Pentagrama. Acest semn avea pentru ei o semnificație mistică. Literele scrise in vârfurile pentagonului formau cuvântul

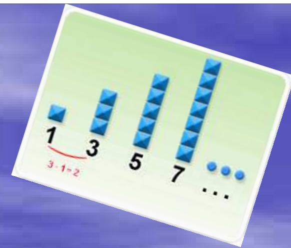
corespunzând cuvântului “salut”.

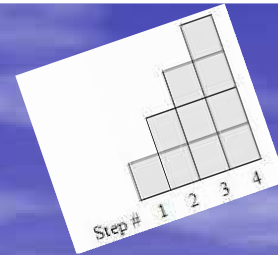


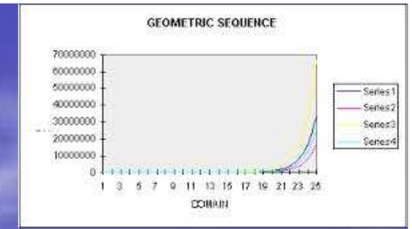
"*MUNDUM REGUNT NUMERI*"

- **După concepția pitagoreicilor numerele reprezentau esența tuturor lucrurilor. Intregul univers constituie o armonie de numere, atribuindu-se acestora proprietăți mistice. Numărul nu reprezintă ca pentru noi, cei de azi, un simbol abstract, care permite evaluarea unei mulțimi sau mărimi, prin numărare, măsurare, cântărire, ci o realitate concretă. Pitagoreicii atribuiau numerelor o existență de sine stătătoare. Numerele sunt lucrurile însele, sau, ceea ce e totuna, lucrurile sunt compuse din numere "MUNDUM REGUNT NUMERI" (numărul guvernează lumea).**

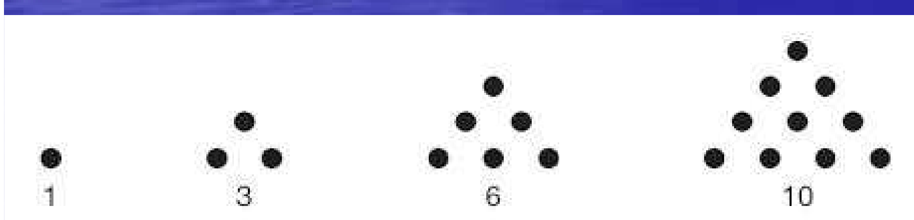


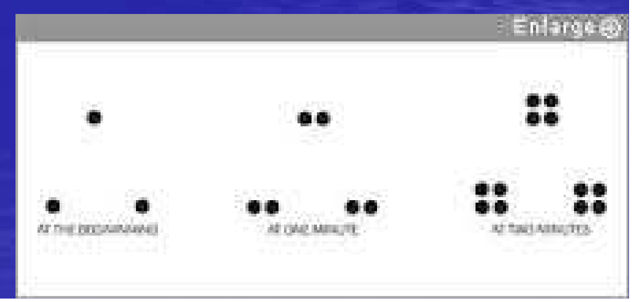






- **Pitagoreicii reprezentau numerele sub forma unor puncte aranjate în diferite moduri, obținând astfel unele figuri geometrice. In acest mod apare noțiunea de numere figurative, realizând pentru prima oară o legătură între aritmetică și geometrie. Fiecare punct simbolizează o unitate, un atom material, este inconjurat de un câmp gol și nu admite nicio fracțiune. Figurile geometrice se nasc, se compun și se descompun numai cu ajutorul numerelor întregi.**
- **După modul în care sunt așezate, numerele pot fi: Liniare, Plane sau Solide, obținând astfel geometria pe o dreaptă, geometria plană sau geometria în spațiu.**
- **Cele mai simple numere liniare, plane sau solide sunt numerele 2,3,4. Numărul 2 determină poziția unei drepte. Numărul 3 determină cea mai simplă figură plană, triunghiul, iar 4 determină cel mai simplu corp in spațiu, tetraderul.**





- **Descompunerea numerelor se putea face și cu ajutorul echerelor. Presupunem un șir de echere care se îmbină unul în altul. Dacă primul echer conține un punct, al doilea 3, al treilea 5, ..., se constată că suma primelor *n* numere impare formează un pătrat de latura *n* (fig. 1). Se obțin astfel numerele pătratice:**

  $1 = 1^2$, $1+3 = 2^2$, $1+3+5 = 3^2$, $1+3+5+7 = 4^2$,..., iar suma primelor *n* numere impare va fi :

  $S_n = 1+3+5+7+\ldots+(2n-1) = n^2$

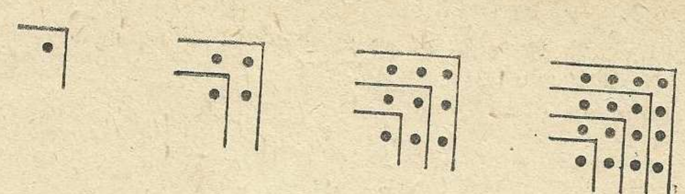


Fig. 1

- Echerele care conțin numerele pare formează dreptunghiuri.
- Primul dreptunghi conține două puncte, al doilea 6, al treilea 12,...

  $2=1\bullet2, \quad 2+4=2\bullet3, \quad 2+4+6=3\bullet4, \quad 2+4+6+8=4\bullet5,\ldots$
- Se obțin astfel **numerele dreptunghiulare.**
- Se constată direct din figura 2 că suma primelor *n* numere pare, formează un dreptunghi de dimensiuni *n* si *n+1*.

  $S_n= 2+4+6+\ldots+ 2n= n(n+1).$

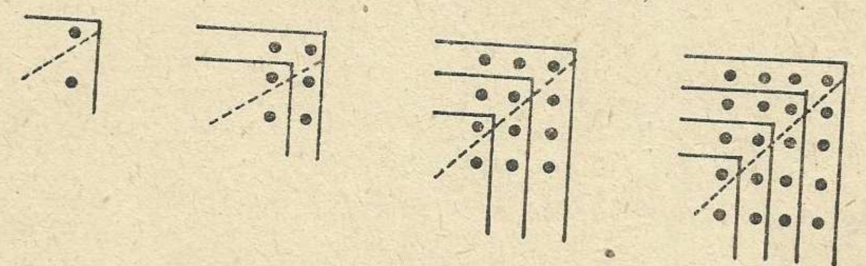
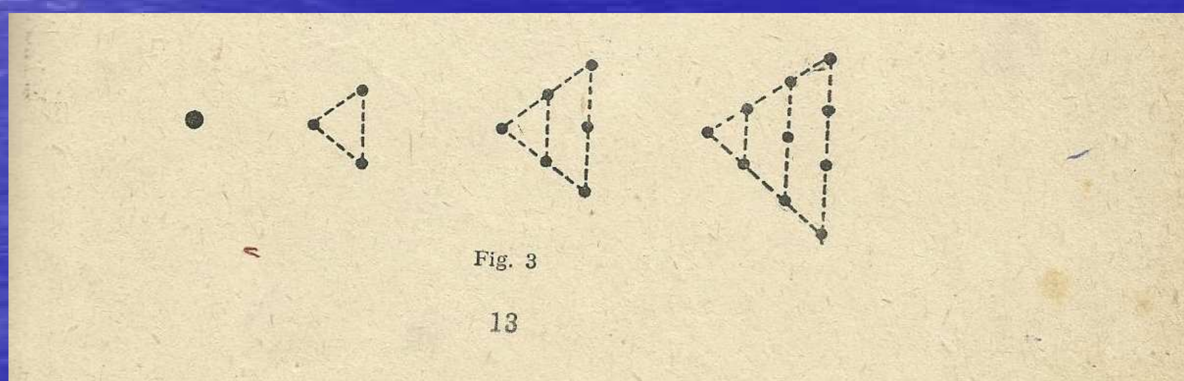


Fig. 2

- **Dacă dreptunghiurile din figura 2 se împart în două părți egale printr-o diagonal, se obțin numerele triunghiulare.**
- **Echerele vor conține numere întregi consecutive.**
- **Numerele triunghiulare se mai pot așeza și sub forma din figura 3:**

1= •1•2, 1+2= •2•3, 1+2+3= •3•4, 1+2+3+4= •4•5,…,

- **Iar suma primelor *n* numere întregi va fi :**
- **S_n=1+2+3+…+n= n(n+1).**



- **Dacă vom așeza două numere triunghiulare unul lângă altul, așa ca în figura 4 (numerele situate în ultima linie să se suprapună), se obțin numerele pătratice.**

n(n-1)
n(3n-1)

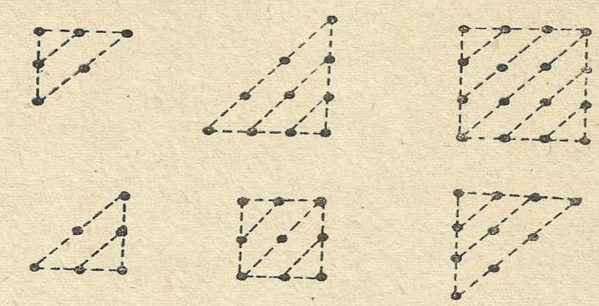


Fig. 4

Dacă vom reuni în același mod, trei numere triunghiulare (fig. 5) se obțin numerele pentagonale.

$S_1=1$, $S_2=1+4=5$, $S_3=1+4+7=12$, $S_4=1+4+7+10=22$

Aceste numere formează o progresie aritmetică cu rația 3 și primul termen egal cu 1:

$1,\ 1+3\bullet 1,\ 1+3\bullet 2,\ 1+3\bullet 3, \dots, 1+3(n-1),$

Iar suma primelor *n* Numere pentagonale va fi:

$S_n=n+3\bullet[1+2+3+\dots+(n-1)]=n+ n(n-1)= n(3n-1)$

- **În mod analog se obțin numerele hexagonale.**

  $S_1=1$, $S_2=1+5=6$, $S_3=1+5+9=15$, $S_4= 1+5+9+13=28$.
- **Aceste numere formează o progresie aritmetică cu rația 4 și primul termen egal cu 1 (fig. 6)**

  $1,\ 1+4\bullet 1,\ 1+4\bullet 2, 1+4\bullet 3,\dots, 1+4(n-1)$.
- **Suma primelor *n* Numere hexagonale va fi:**

  $S_n=1+5+9+13+\dots+(4n-3)= n(2n-1)$.
- **Generalizând, se obține formula care ne dă numere poligonale cu *p* laturi. Fiecarui poligon îi corespunde astfel un șir de numere prin însumarea unei progresii aritmetice cu primul termen egal cu unitatea și rația egală cu numărul laturilor, mai puțin două:**

  $1,\ 1+1\bullet(p-2),\ \ 1+2\bullet(p-2),\dots, 1+(n-1)(p-2)$;

  $S_n=1+(p-1)+\dots+(np-2n-p+3)=$

  $= [n(p-2)-(p-4)]$

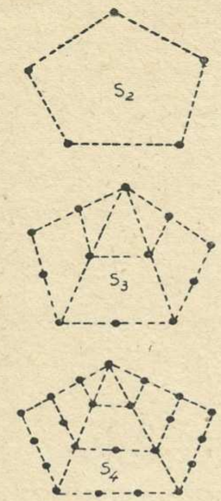


Fig. 5

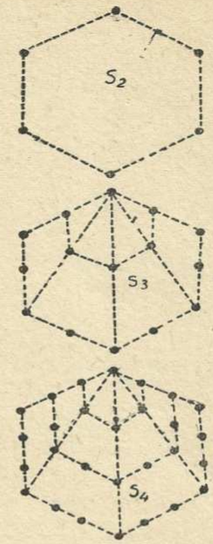


Fig. 6

k \ i	1	2	3	...	n	S_n
3	1	2	3	...	n	$n(n+1)/2$
4	1	3	5	...	$2n-1$	n^2
5	1	4	7	...	$3n-2$	$n(3n-1)/2$
6	1	5	9	...	$4n-3$	$n(2n-1)$
7	1	6	11	...	$5n-4$	$n(5n-3)/2$
8	1	7	13	...	$6n-5$	$n(3n-2)$
9	1	8	15	...	$7n-6$	$n(7n-5)/2$
10	1	9	17	...	$8n-7$	$n(4n-3)$
...	...	...	...	...	...	....
p	1	$p-1$	$2p-3$	...	$1+(n-1)(p-2)$	$\frac{n}{2}\,[n(p-2)-(p-4)]$

- În tabelul de mai sus se pot vedea: suma primilor 3 termeni, termenul general (de ordinul *n*), precum și suma primelor *n* numere triunghiulare, pătratice, pentagonale,..., decagonale,..., p-gonale. Pentru a obține numerele pătratice, pitagoreicii mai foloseau și metoda denumită *stadion.* Pentru a găsi, de exemplu, pe 6^2 , se scriu numerele de la 1 la 6 și înapoi de la 6 la 1, așa ca în fig. 7.

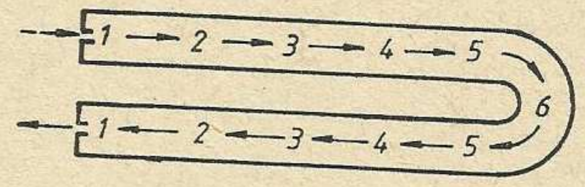


Fig. 7

- **Făcând suma acestor numere se obține:**

  $$2(1+2+3+4+5)+6=2\cdot\ \cdot 5+6=6\cdot 5+6=6^2$$

- **În general, pătratul unui număr oarecare *n* se va obține însumând numerele așezate pe *stadionul* din figura 8:**

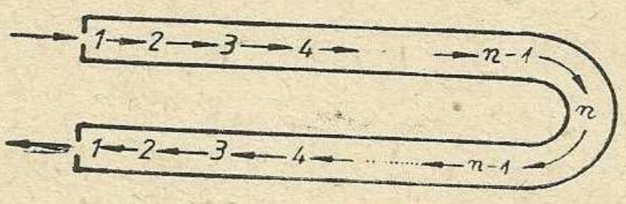


Fig. 8

- **Se constată că, numărul 1 se află la intrarea și la ieșirea din *stadion*, iar numărul *n* al cărui pătrat se cere este situat la cotitură.**
- **Dacă vom însuma numerele situate pe acest *stadion*, se obține:**

$$2[1+2+3+\ldots+(n-1)]+n=2\bullet\ +n=n^2.$$

- **Geometria figurativă în spațiu a condus la studierea numerelor solide, cele mai simple fiind numerele tetraedrale. Aceste numere se obțin prin suprapunerea numerelor triunghiulare așezate pe plane paralele. Se determină astfel tetraedre, ale căror fețe sunt triunghiuri echilaterale egale (fig. 9).**
- **Formula care ne dă suma a *n* numere tetraedrale:**
- **Din figura 9 se constată că:**

$S_1=1,\ S_2=1+3=4,\ S_3=1+3+6=10,$

$S_4=1+3+6+10=20,\ldots$

$S_n=1+3+6+\ldots+n(n+1)=\Sigma k(k+1)=n(n+1)(n+2)$

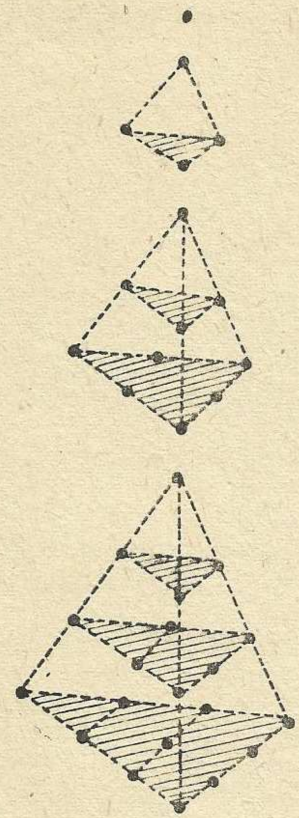


Fig. 9

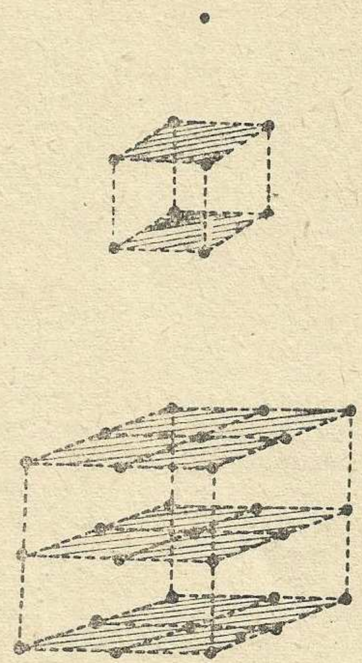


Fig. 10

- **Pentru *n*=1,2.3,4 găsim:**

  S_1 •1•2•3=1; S_2= •2•3•4=4;

  S_3= •3•4•5=10; S_4= •4•5•6=20.
- **Numerele cubice erau formate din cuburi având latura egală cu 1,2,3,..,*n*, așa cum se vede în figura 10.**

  $V_1=1^3=1$, $V_2= 4+4= 2^3$, $V_3=9+9+9= 3^3$.
- **Formula care ne dă suma cuburilor primelor *n* numere natural este:**

  $S_n=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3= n^2(n+1)^2$
- **Pentru *n*=1,2,3 obtinem :**

  S_1= •1^2•2^2=1, S_2= •2^2•3^2=9,

  S_3= •3^2•4^2=36.
- **În mod analog erau formate și alte numere solide: numerele Paralelipipedice, Prismatice, Piramidale,…**
- **Dintre toate aceste denumiri folosite pentru numerele figurative se mai păstrează astăzi pătratul și cubul unui număr.**

- **Pitagora a întocmit, de asemenea, și *Tabela înmulțirii*.**
- **Cunoscuta si sub numele de *Tabela lui Pitagora*, aceasta ne permite să cunoaștem produsul a două numere naturale a x b unde a,b € { 1,2,…, 10}.**
- **În geometrie, i se atribuie propoziția din care rezultă că: "un plan poate fi acoperit cu poligoane regulate identice dacă folosim triunghiuri echilaterale, pătrate sau hexagonale" (fig. 11).**

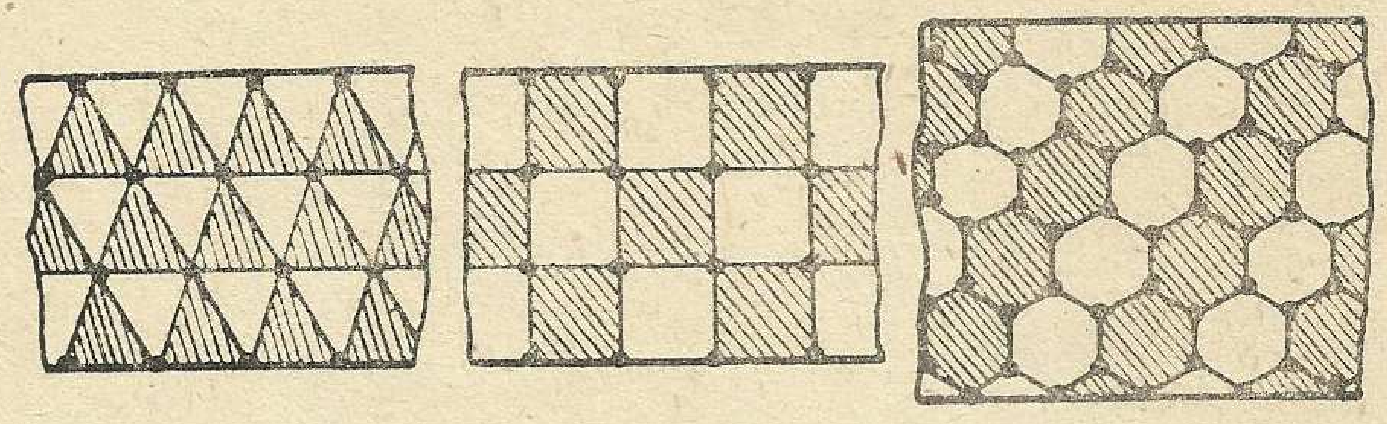


Fig. 11

- **Aceasta afirmație se justifică astfel:**

- **Notăm cu *m* numărul poligoanelor ce au câte un vârf comun și, ca urmare, unul din cele *m* unghiuri va fi 360:*m*.**
- **Cum unghiul unui poligon regulat cu *n* laturi are 180° (n-2):*n* grade,**

  se deduce egalitatea:

$$\frac{180^\circ(n-2)}{n} = \frac{360^\circ}{m}$$, adica $n = 2 + \frac{4}{m-2}$

- ***m*** **si *n* fiind numere intregi, se obține: m=3, n=6; m=4, n=4; m=6, n=3.**
- **Deci, planul poate fi acoperit numai cu hexagoane regulate, pătrate sau triunghiuri echilaterale.**

- **Au fost studiate, de asemenea, numerele Perfecte, Imperfecte și Supraperfecte.**
- **Un număr se numește Perfect dacă suma S a divizorilor săi (exceptând numărul însuși) este egală cu numărul dat N. Dacă $S > N$, numărul este Supraperfect , iar dacă $S < N$, numărul este Imperfect.**
- **Mai târziu, Euclid (sec. 3 i.e.n) dă formula numerelor perfecte: $N=2^{p-1}\bullet(2^{p}-1)$, unde *p* din 2^{p-1} este număr prim.**
- **Pentru p = 2,3,5, se obțin *numerele perfecte*:**

6=1+2+3;   28=1+2+4+7+14;

496=1+2+4+8+16+61+62+124+248

- Se cunosc până acum 18 numere perfecte, ultimul se obține pentru p=3217 și are aproximativ 200 de cifre.

- Numerele:

  $12<1 + 2+3+4+6$;
  $18<1+2+3+6+9$;
  $20<1+2+4+5+10$
  sunt *supraperfecte*,

iar numerele :

  $14>1+2+7$; $16>1+2+4+8$;
  $22>1+2+11$

sunt *imperfecte*.

- În școala pitagoreică erau studiate și Numerele Prietene (fiecare dintre ele este egal cu suma divizorilor celuilalt). Lui Pitagora i se atribuie găsirea primei perechi de numere prietene: 220 si 284.

  $$220=1+2+4+71+142$$

  $$284=1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110$$

- A doua pereche de numere prietene a fost gasită abia în anul 1636 de Pierre Fermand:

  N_1=9363 584; N_2= 94372056.

- Până în anul 1943 se cunoșteau 390 de astfel de numere

- ***Teoria cosmogonică*** **al lui Pitagora presupune că toate corpurile cerești erau situate pe zece sfere și se roteau pe niste traiectorii circulare, în jurul unui foc sacru. Apare pentru prima oară ipoteza că pământul nu se află in centrul lumii, abandonând astfel teoria geocentrică.**

Bibliografie:

- Mihu Cerchez , Pitagora , Editura Academiei , București,1896
- Viorel Voda, Triunghiul-Ringul cu trei colțuri, Editura Albatros,1979
- Tannery, Pour L'Histoire de la science hellene, Paris,1930
- Petre Sergescu, Gândirea Matematică, Ed. Ardealul, Cluj,1928